Les Francs Bourgeois - La Salle
Frères des Écoles Chrétiennes

DST 2 de :	SPECIALITE MATHEMATIQUES		
Date du DST :	Vendredi 24 janvier 2025	Durée de l'épreuve :	2 heures
Nom du professeur :	Mme FAHLAOUI	Groupe :	1SPE MATHS5
Matériel autorisé :	• L'usage de la calculatrice graphique avec **MODE EXAMEN ACTIF** est autorisé pour cette épreuve. • L'usage de la calculatrice sans mémoire « type **collège** » est autorisé pour cette épreuve.		
Consignes particulières :	• Ne pas rendre le sujet (pages 1 & 2). • **Compléter la page 3 et la rendre avec la copie.**		

Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = \dfrac{5u_n + 1}{u_n + 5} \end{cases}$

On admet que pour tout entier naturel $n,\ u_n > 1$

1. Déterminer la valeur exacte de u_1 et celle de u_2.
2. Démontrer que pour tout entier naturel $n,\ u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1 - u_n)(1 + u_n)}{u_n + 5}$
3. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
4. À l'aide de la calculatrice, déterminer à partir de quel entier n, on a : $u_n < \dfrac{3}{2}$

Exercice 2

La courbe $(\mathcal{C}_f)$ représentée ci-dessous est une partie de la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

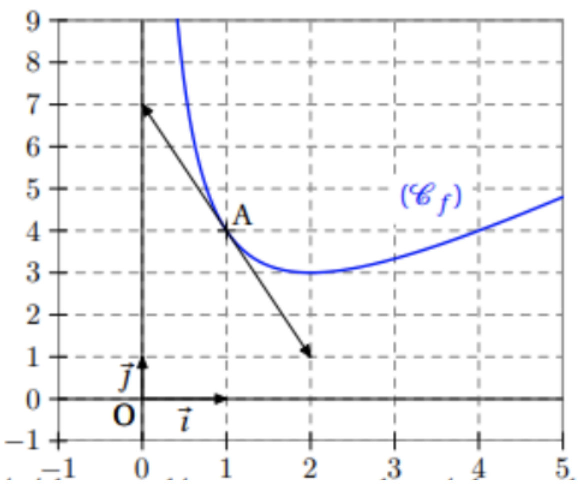
$$f(x) = \frac{ax^2 - x + b}{x}$$

où les coefficients a et b sont à déterminer.

1. Par lecture graphique, déterminer $f(1)$ et $f'(1)$.
2. Déterminer $f'(x)$ en fonction de a et b.
3. En utilisant les valeurs trouvées dans les questions précédentes, démontrer que les réels a et b vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ a - b = -3 \end{cases}$$

4. En résoudre le système trouvé à la question 3. et en déduire que $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 4}{x}$.
5. En utilisant l'expression de $f(x)$, déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 1.



Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{8x+6}{x^2+1}$

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -\dfrac{4(x+2)(2x-1)}{(x^2+1)^2}$
2. Étudier le signe de la dérivée de f.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{8u_n+6}{u_n^2+1}$

   En utilisant la courbe $(\mathcal{C}_f)$ mise en annexe page 3, placer les quatre premiers termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses.

Exercice 4

Les deux questions suivantes sont des exercices indépendants.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
2. Dans cet exercice, on dispose de la donnée suivante : $\tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2}-1$

   On rappelle que $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ pour tout $x \in D$ où $D = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}\right\}$

   (a) Démontrer que pour tout $x \in D$: $\tan(x+\pi) = \tan(x)$

   En déduire la valeur exacte de $\tan\left(\dfrac{9\pi}{8}\right)$

   (b) Démontrer que pour tout $x \in D$: $1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$

   En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$, puis celle de $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$

Exercice 5

Avant le début des travaux de construction d'une autoroute, une équipe d'archéologie préventive procède à des sondages successifs en des points régulièrement espacés sur le terrain.

Lorsque le n-ième sondage donne lieu à la découverte de vestiges, il est dit positif.

L'évènement : « le n-ième sondage est positif » est noté V_n, on note p_n la probabilité de l'évènement V_n.

L'expérience acquise au cours de ce type d'investigation permet de prévoir que :

- si un sondage est positif, le suivant a une probabilité égale à $0,6$ d'être aussi positif ;
- si un sondage est négatif, le suivant a une probabilité égale à $0,9$ d'être aussi négatif.

On suppose que le premier sondage est positif, c'est-à -dire : $p_1 = 1$.

1. Calculer les probabilités des évènements suivants :

   (a) A : « les 2e et 3e sondages sont positifs » ;

   (b) B : « les 2e et 3e sondages sont négatifs ».
2. Calculer la probabilité p_3 pour que le 3e sondage soit positif.
3. n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

   Compléter l'arbre mis dans l'annexe page 3 en fonction des données de l'énoncé.
4. Pour tout entier naturel n non nul, établir que : $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,1$.
5. À l'aide de la calculatrice, conjecturer sur la limite de la suite (p_n).

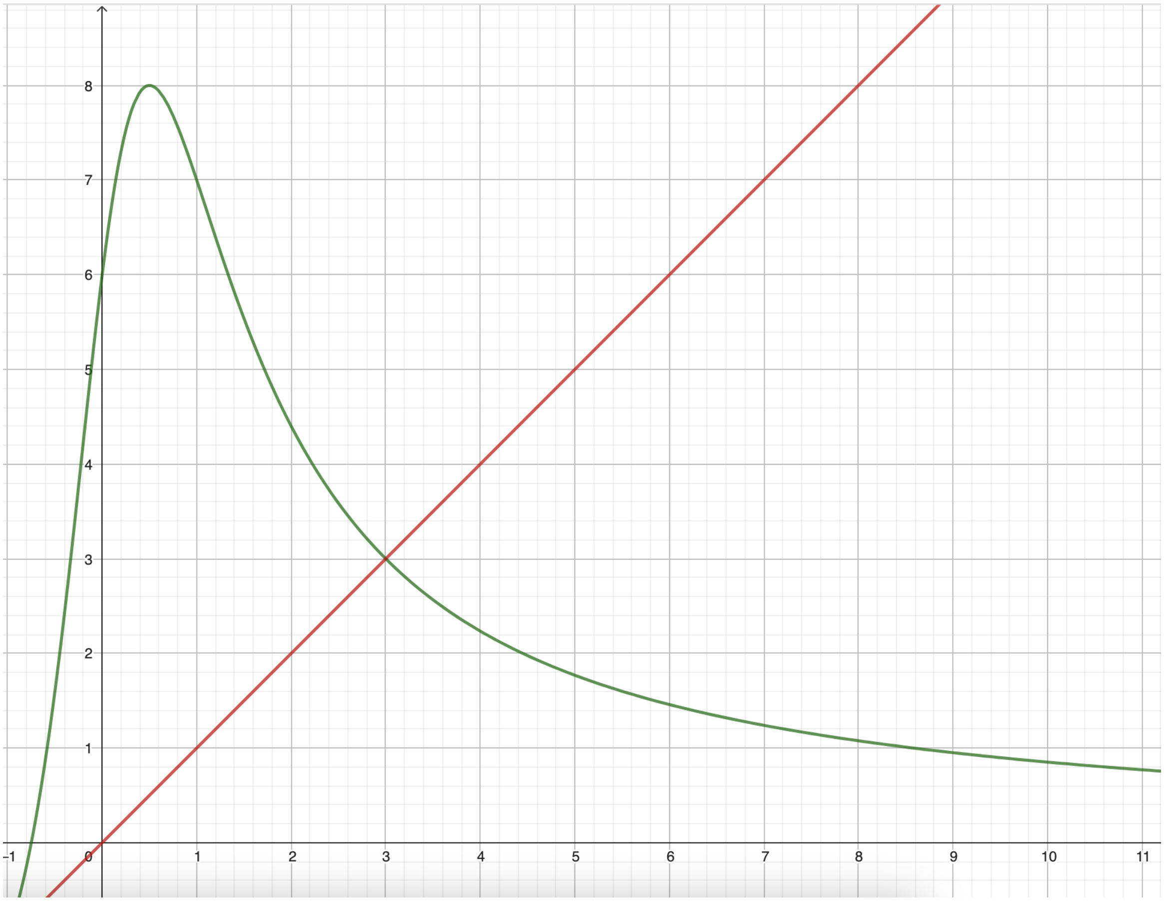
   Qu'en déduire pour les forages sur le long terme ?

NOM Prénom :

Barème :

	Exercice 1	Exercice 2	Exercice 3	Exercice 4	Exercice 5
Total	4	5	3	3	5

Annexe de l'exercice 3



Annexe de l'exercice 5